

UNA ADAPTACIÓN DEL MÉTODO DE RELAJACIÓN PARA LA ECUACIÓN DE LAPLACE CON CONDICIONES DE CONTORNO ABIERTAS

Diego Sanjinés C.¹

*Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés
Casilla 8635, La Paz—Bolivia*

RESUMEN

Se utiliza el algoritmo numérico de relajación para la ecuación de Laplace en dos dimensiones, correspondiente a una distribución arbitraria de carga eléctrica contenida en una región finita del espacio. Las condiciones de contorno de este problema son abiertas, pues se conoce el potencial en cada carga y no así en el contorno de la región. El problema de conocer el potencial dentro de dicha región se resuelve hallando las contribuciones de monopolo y dipolo en la expansión multipolar del potencial bajo la aproximación de campo lejano, y así se establece el potencial en un contorno circular que contiene a la región de interés. Luego se aplica el algoritmo de relajación usual tomando al potencial de dicho contorno como condición de contorno cerrada, lo que permite finalmente calcular de manera recursiva el potencial en toda la región interior. Esta técnica se ilustra para un dipolo, un “tripolo”, un cuadrupolo y una pieza continua de forma arbitraria.

1. INTRODUCCIÓN

La ecuación de Laplace, $\nabla^2 V = 0$, reviste una importancia fundamental en varias áreas de la física, y por ello se han elaborado varios métodos matemáticos para hallar sus soluciones $V(\mathbf{r})$. Dichas soluciones dependen fuertemente de las condiciones de contorno para esta ecuación. La mayoría de los métodos analíticos para resolver la ecuación suponen simetrías especiales que en la mayoría de los casos no corresponden a los problemas que se desea resolver. Una de las alternativas más viables de solución de la ecuación de Laplace resulta ser la aproximación numérica por iteraciones sucesivas una vez que $\nabla^2 V = 0$ se ha convertido en una ecuación de diferencias finitas. Así, al comparar los valores de $V(\mathbf{r})$ en dos iteraciones consecutivas (para un cierto \mathbf{r}) y establecer que su diferencia es menor que un valor pequeño fijado de antemano, entonces se da por terminado el proceso de iteración y se supone que se tiene ya una buena aproximación numérica a la solución buscada para $V(\mathbf{r})$. Este método de aproximaciones numéricas sucesivas que converge a una solución se denomina “método de relajación”.

Si $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ la ecuación de Laplace toma la forma

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

que se puede convertir en una ecuación de diferencias finitas al aproximar las derivadas parciales por :

$$\frac{\partial V}{\partial x} \cong \frac{1}{\Delta x} [V(x + \Delta x, y) - V(x, y)], \quad (2a)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cong \frac{1}{\Delta x^2} [V(x + \Delta x, y) - 2V(x, y) + V(x - \Delta x, y)]; \quad (2b)$$

y de manera similar,

$$\frac{\partial V}{\partial y} \cong \frac{1}{\Delta y} [V(x, y + \Delta y) - V(x, y)], \quad (2c)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \cong \frac{1}{\Delta y^2} [V(x, y + \Delta y) - 2V(x, y) + V(x, y - \Delta y)]. \quad (2d)$$

Al sustituir estas aproximaciones en (1) con $\Delta x = \Delta y$ queda la fórmula

$$V(x, y) \cong \frac{1}{4} [V(x + \Delta x, y) + V(x - \Delta x, y) + V(x, y + \Delta y) + V(x, y - \Delta y)] \quad (3)$$

que es bien conocida (ver, por ejemplo, *Numerical Recipes* [1]) como un algoritmo numérico práctico que se aplica de manera iterativa a los puntos (x, y) de un cierto dominio cuadrículado $S \subset \mathbb{R}^2$ con contorno ∂S donde se conoce de antemano los valores de $V(x, y)$. Esta última es la condición de contorno de Dirichlet. Existen otras condiciones de contorno como la de Neumann y la de Cauchy [2], pero en este trabajo se supondrá solamente la condición de Dirichlet pues ésta es la que resulta relevante para el problema comprendido aquí.

Cuando se aplica el método de relajación para el algoritmo (3) se obtiene como resultado los valores $V(x, y)$ en el dominio cuadrículado S sujetos a la condición de

¹Email: sanjines@fiumsa.edu.bo

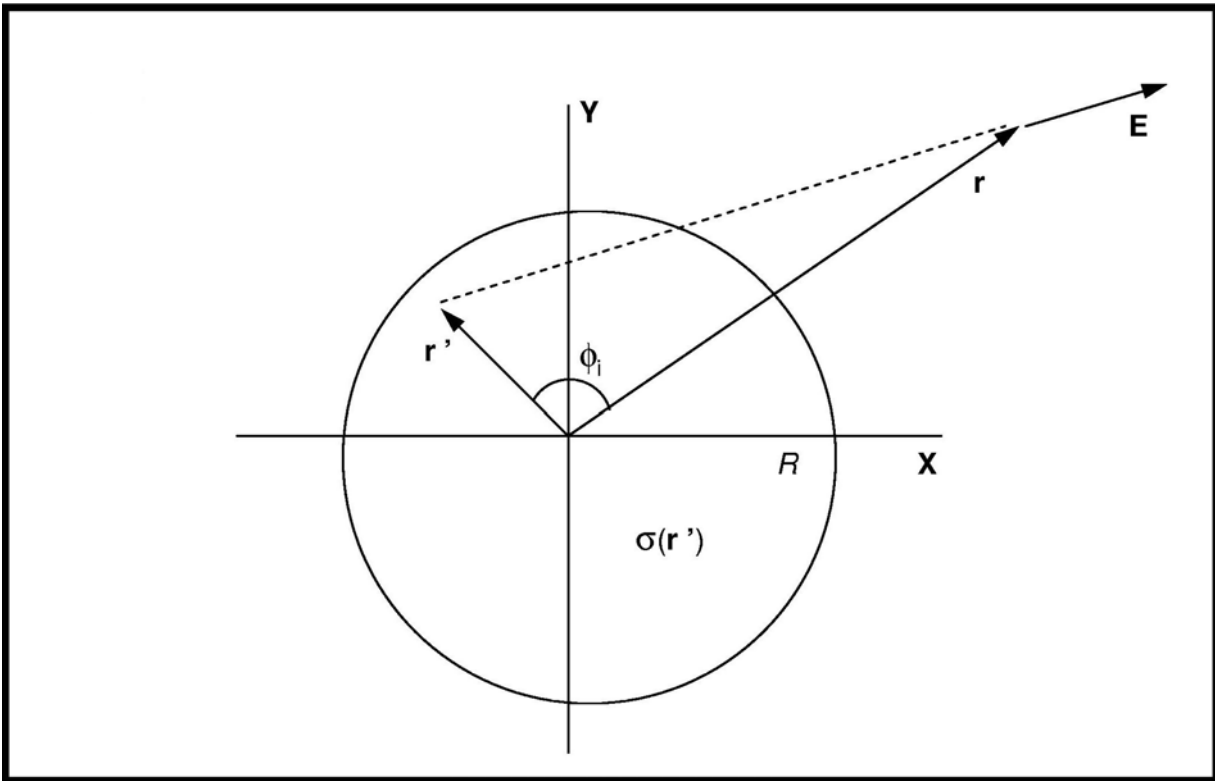


Figura 1.

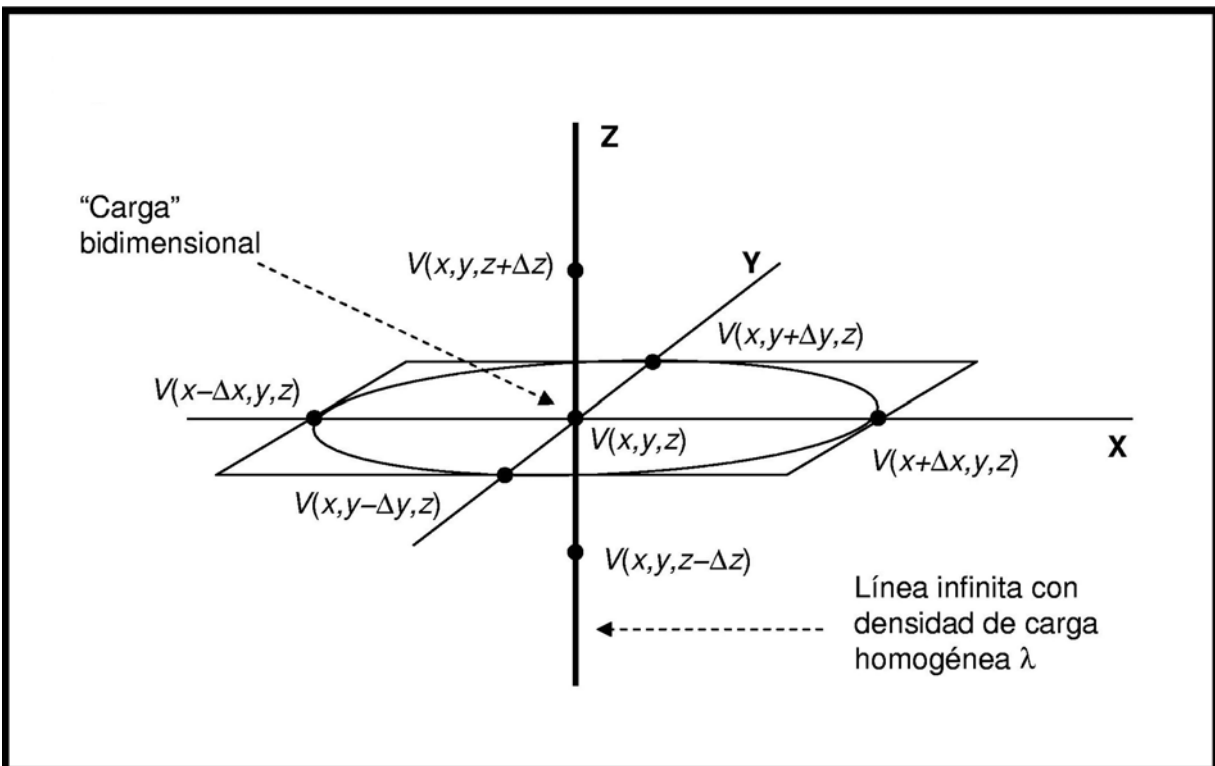


Figura 2.

contorno de Dirichlet fijada de antemano. Dichos valores se pueden graficar en un diagrama de “niveles”, lo que conduce a un “mapa” de curvas cuya ecuación es $V(x, y) = V_0$, donde V_0 es un valor que caracteriza a cada curva. En electrostática, $V(x, y)$ es la función potencial eléctrico y dichas curvas son las curvas equipotenciales. La determinación del mapa de curvas equipotenciales para una distribución arbitraria de carga eléctrica y una condición de contorno de Dirichlet, proporciona información valiosa sobre las características físicas de dicho sistema, como ser la distribución del campo eléctrico debido a la distribución de carga dada [2] [3].

2. CONDICIONES DE CONTORNO ABIERTAS

La aplicación del método de relajación (3) a problemas de electrostática generalmente supone la condición de contorno de Dirichlet “cerrada”, es decir, que el dominio S se encuentra en el *interior* del contorno ∂S . Dicho de otro modo: ya que $S \subset \mathbb{R}^2$, entonces ∂S es una curva plana continua que al ser recorrida en el sentido antihorario tiene al dominio S siempre a su *izquierda*. Pero, ¿es posible tener otras condiciones de contorno consistentes con el algoritmo dado por la fórmula (3)? Esta fórmula es muy adecuada y fácil de aplicar a una gran variedad de problemas pues representa a un algoritmo “aritmético” o “escalar”, i.e., no toma en cuenta la posición de los puntos \mathbf{r}_n que constituyen la condición de Dirichlet $V(\mathbf{r}_n) = V_n$. Si tuviera que tomarse en cuenta la posición de estos puntos, entonces el correspondiente algoritmo de relajación ya no tendría la simplicidad de (3) donde $V(x, y)$ es una función lineal de los potenciales de los cuatro primeros vecinos de (x, y) , sino algo más general y complicado como ser $V(x, y) = f(x, y, x_n, y_n)$ donde la distancia entre $\mathbf{r}_n = (x_n, y_n)$ y (x, y) es variable y f puede no ser una función lineal de sus argumentos. Así, la alternativa a una condición de contorno “cerrada” será la condición de contorno “abierta” definida como el valor o valores que toma $V(\mathbf{r})$ a lo largo de la curva plana continua ∂S que al ser recorrida en el sentido antihorario tiene al dominio S siempre a su *derecha*. Así, el dominio S queda ilimitado.

El problema de resolver la ecuación de Laplace con condición de contorno “abierto” de Dirichlet se conoce también como el *primer problema externo de contorno* [4] y se establece en tres dimensiones ($\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$) requiriendo que la función $V(x, y, z)$ satisfaga:

- i) $\nabla^2 V = 0$ en el dominio desacotado S ;
- ii) V debe ser continua en todas partes, incluyendo el contorno ∂S ;
- iii) $V(\partial S) = f(x, y, z)$ donde f es una función dada en ∂S ;
- iv) $V(M) \rightarrow 0$ cuando $M \rightarrow \infty$ ($M \in \mathbb{R}$).

De manera similar, en dos dimensiones ($\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$) se requiere que la función $V(x, y)$ satisfaga (i), (ii), (iii) (con $f = f(x, y)$) y además, la condición –menos restrictiva que (iv)–:

- v) $V(M) \rightarrow N$ cuando $M \rightarrow \infty$ ($N \in \mathbb{R}$).

En este trabajo nos interesará el caso particular de la

condición de contorno “abierta” (primer problema externo de contorno) aplicada a *varios* contornos diferentes, cada uno de los cuales cumple con las condiciones (i), (ii), (iii) y (v). Así, en términos físicos, el problema abordado aquí consiste de adaptar el método de relajación representado por el algoritmo (3) a una distribución de carga, ya sea continua o discreta, localizada en un cierto dominio de \mathbb{R}^2 que podremos suponer como un círculo de radio R (Fig.1), de tal forma que (3) nos permita calcular el “mapa” de curvas equipotenciales en el dominio desacotado S , correspondiente a la distribución de carga en cuestión.

3. EL PROBLEMA BIDIMENSIONAL COMO UN CASO DE PROBLEMA TRIDIMENSIONAL

Al aplicar el algoritmo (3) a una cierta distribución de carga en dos dimensiones (2D), ésta debe corresponder a una distribución de carga en tres dimensiones (3D). ¿Cuál es esta distribución y qué características geométricas tiene? Para contestar la cuestión veamos la forma de convertir a una ecuación de diferencias la ecuación de Laplace en tres dimensiones:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (4)$$

Las fórmulas correspondientes a (2b) y (2d) son:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cong \frac{1}{\Delta x^2} [V(x + \Delta x, y, z) - 2V(x, y, z) + V(x - \Delta x, y, z)], \quad (5a)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \cong \frac{1}{\Delta y^2} [V(x, y + \Delta y, z) - 2V(x, y, z) + V(x, y - \Delta y, z)], \quad (5b)$$

y, *mutatis mutandi*,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \cong \frac{1}{\Delta z^2} [V(x, y, z + \Delta z) - 2V(x, y, z) + V(x, y, z - \Delta z)] \quad (5c)$$

Sustituyendo (5a) – (5c) en (4) con $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ se obtiene

$$V(x, y, z) \cong \frac{1}{6} [V(x + \Delta x, y, z) + V(x - \Delta x, y, z) + V(x, y + \Delta y, z) + V(x, y - \Delta y, z) + V(x, y, z + \Delta z) + V(x, y, z - \Delta z)]. \quad (6)$$

Al hacer que $V(x, y, z + \Delta z) = V(x, y, z - \Delta z) = V(x, y, z)$ se obtiene la ecuación (3). Esto quiere decir que el algoritmo de relajación bidimensional representado por (3) corresponde a una distribución de carga tridimensional con simetría de traslación a lo largo del eje Z . Dicho de otra manera: el algoritmo (3) permite

encontrar la *proyección bidimensional* (en el plano XY) del “mapa” de curvas equipotenciales correspondientes a una distribución de líneas infinitas de carga orientadas a lo largo del eje Z. Esta distribución (discreta o continua) está localizada dentro de un dominio finito circular de radio R en el plano XY (Fig.2). Así, de manera interesante, vemos que –por ejemplo– para una distribución discreta de líneas de carga, se tiene distribuciones continuas de carga a lo largo del eje Z mientras en el plano XY se tiene una distribución discreta de “cargas”. Estas “cargas” en dos dimensiones en realidad tienen unidades bien definidas en SI que hallaremos en la siguiente sección.

Otra forma pedagógica de entender el problema en 2D como un problema físico *bona fide*, es suponer una carga eléctrica puntual de valor Q ubicada en $\mathbf{r} = (0,0,0)$ en una lámina dieléctrica bidimensional delgada e infinita (plano XY de la Fig.2). El valor de la permitividad eléctrica $\epsilon(\mathbf{r}) = \kappa(\mathbf{r})\epsilon_0$ sería variable y correspondería a un medio anisotrópico en 3D: $\epsilon(\mathbf{r}) = \epsilon_0$ si $z \neq 0$ y $\epsilon(\mathbf{r}) = \kappa\epsilon_0$ ($\kappa > 1$) si $z = 0$. Nos preguntamos entonces cuál es la forma que adquiere la ecuación de Laplace en dicho medio anisotrópico. El campo eléctrico correspondiente será

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon(\mathbf{r})} \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

y ya que este campo es conservativo, entonces se cumple $\mathbf{E} = -\nabla V$, así que $\nabla^2 V = -\nabla \cdot \mathbf{E}$. Realizando las derivadas correspondientes, se obtiene

$$\nabla^2 V = \frac{Q}{4\pi\epsilon^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \frac{z}{r^3}.$$

Si $z \neq 0$ (encima o debajo del plano dieléctrico según la Fig.2), entonces ϵ es constante, así que $\partial_z \epsilon = 0$, por lo que $\nabla^2 V = 0$ en 3D (ecuación (4)). Si $z = 0$, entonces el valor de ϵ varía *abruptamente*, por lo que $\partial_z \epsilon$ se puede modelar por una delta de Dirac, $\partial_z \epsilon = \delta(z)$. En este caso ($z = 0$), el producto $z\delta(z)$ es cero *para todo* z (ver, por ejemplo, Butkov [5]). Así, se obtiene $\nabla^2 V = 0$ en 2D (ecuación (1)), cuya solución corresponde al potencial eléctrico sobre una lámina dieléctrica plana e infinita cuya constante dieléctrica κ es diferente del medio que está encima y debajo de la lámina. En la práctica, tal situación se puede encontrar aproximadamente en una película delgada de agua ($\kappa = 80$) donde haya alguna distribución de carga eléctrica; esta película reposaría sobre una placa de vidrio ($\kappa = 5$) y encima de la película habría aire ($\kappa = 1$).

4. EXPANSIÓN MULTIPOLAR DEL POTENCIAL ELÉCTRICO EN DOS DIMENSIONES

Para una línea continua de carga orientada a lo largo del eje Z, la simetría de traslación es la simetría cilíndrica. En este caso se puede utilizar la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico radial debido a una densidad lineal y homogénea de carga λ . El resultado bien conocido es $\mathbf{E} = (2K\lambda/r)\mathbf{e}_r$, donde $K = 1/(4\pi\epsilon_0)$ y \mathbf{e}_r es el vector unitario radial. El potencial correspondiente se encuentra a través de la relación $\mathbf{E} = -\nabla V$, donde

$\nabla = \mathbf{e}_r (\partial/\partial r)$ es el operador nabla efectivo en coordenadas cilíndricas para un potencial con simetría cilíndrica $V = V(r)$. Así, el potencial buscado para una línea continua de carga resulta ser $V(r) = -2K\lambda \ln(r/r_0)$, donde r_0 es la distancia a partir de la línea de carga donde el valor del potencial se define como cero para esta línea. Si $r < r_0$, entonces $V(r) > 0$. A partir de esta expresión se construye la solución general del potencial para una distribución de “carga” bidimensional en el plano XY:

$$V(r) = - \int dr' \sigma(r') \ln \left(\frac{|r - r'|}{r'_0} \right). \quad (7)$$

Los límites de integración en (7) corresponden al círculo de radio R donde se encuentra localizada la “carga” total Q de valor

$$Q = \sum_i q_i = \int dr' \sigma(r'), \quad (8)$$

siendo $\sigma(\mathbf{r}')$ la densidad superficial de la distribución de “carga” en el plano XY. Vemos pues que la cantidad física a la que nos referimos como la “carga” bidimensional corresponde a $2K\lambda$ y tiene unidades de voltios.

El valor de r_0' en (7) es inmaterial para la determinación del campo eléctrico correspondiente, por ejemplo, a una sola línea de carga ($r_0' = r_0$) y a una distancia r de la línea: $E(r) = -\partial V/\partial r = 2K\lambda/r$. Por otra parte, si se conoce el campo eléctrico $E_a \equiv E(a)$ a una distancia a de la línea de carga, entonces $E(r) = E_a a/r$ para cualquier $r > 0$. Vemos pues que ni la “carga” bidimensional $2K\lambda$ ni r_0 aparecen como parámetros relevantes en la determinación física del campo eléctrico. De la misma forma, el potencial eléctrico $V(r)$ se puede escribir como

$$V(x) = V_a \left(\frac{\ln x}{\ln a/r_0} + 1 \right), \quad (9)$$

donde $r = xa$ y $a > r_0$. El potencial re-escalado definido por $\tilde{V} \equiv V_a/\ln(a/r_0)$ correspondería a un valor intermedio entre $V(a) = V_a$ y $V(r_0) = 0$. Eliminando la constante aditiva V_a en (9) por ser inmaterial, el potencial debido a una línea de carga se escribe finalmente en términos de la “distancia” adimensional $x = r/a > 1$ como

$$V(x) = \tilde{V} \ln x. \quad (10)$$

Así, a partir de (10) se construye la solución general del potencial eléctrico en un punto del plano XY correspondiente a una distribución de potenciales \tilde{V}_i cuyas fuentes son las “cargas” q_i en (8):

$$V(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x}' \xi(\mathbf{x}') \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \quad (11)$$

donde $\xi(\mathbf{x}')$ es una “densidad de potencial” definida por

$$\sum_i \tilde{V}_i = \int d\mathbf{x}' \xi(\mathbf{x}'). \quad (12)$$

Las ecs. (11) y (12) son pues equivalentes a (7) y (8) respectivamente, con la novedad de que en (11) y (12) ya no aparecen “cargas” bidimensionales q_i ni r_0' , y en su lugar queda la distribución de potenciales re-escalados \tilde{V}_i que son proporcionales a los potenciales “fuente” $V_{a,i}$; éstos serán usados como datos en las condiciones de contorno abiertas del algoritmo de relajación dado por (3).

El desarrollo de (7) en serie de Taylor en torno a $r'=0$ es

$$V(\mathbf{r}) = Q \ln\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^2} + (r'^2), \quad (13)$$

donde Q es la “carga” total en (8) y \mathbf{p} es el momento dipolar dado por:

$$\mathbf{p} = \int dr' \sigma(\mathbf{r}') \mathbf{r}' = \sum_i q_i \mathbf{r}'_i. \quad (14)$$

Resulta interesante comparar (13) con la expansión multipolar de $V(\mathbf{r})$ en tres dimensiones:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} + (r'^2), \quad (15)$$

donde Q y \mathbf{p} coinciden con las sumas discretas de (8) y (14) siempre que q_i sea la carga eléctrica. Vemos pues que –en general– la solución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones es *diferente* del caso en tres dimensiones, y que éste no se reduce a la solución en dos dimensiones al tomar, por ejemplo, $z=0$ (que podría ser un primer intento intuitivo de obtener la solución bidimensional a partir de la conocida solución tridimensional).

De manera análoga a (13), el desarrollo de (11) en serie de Taylor alrededor de $x'=0$ es

$$V(\mathbf{x}) = \left(\sum_i \tilde{V}_i \right) \ln x + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{P}}{x^2} + (x'^2), \quad (16)$$

donde el potencial total $\sum_i \tilde{V}_i$ está dado por (12) y \mathbf{P} es el momento “dipolar” del potencial definido por

$$\mathbf{P} = \int dx' \xi(\mathbf{x}') \mathbf{x}' = \sum_i \tilde{V}_i \mathbf{x}'_i. \quad (17)$$

A partir de (16) se puede proponer un esquema de solución numérica al problema en cuestión: ¿cómo adaptar el algoritmo de relajación para resolver la ecuación de Laplace con condiciones de contorno abiertas? Ya que en (16) los dos primeros términos son dominantes para $x \rightarrow \infty$, entonces elegiremos condiciones para que el primer término V_M (monopolar) sea cero y el segundo término V_D (dipolar) sea suficientemente pequeño, de tal forma que $V(\mathbf{x}) \cong 0$ sobre una circunferencia de radio $R_0 \gg R$ (Fig.1). Así, dicha circunferencia con $V(\mathbf{x}) \cong 0$ constituiría una condición de contorno (de Dirichlet) *cerrada* y el algoritmo de relajación dado por (3) se aplicaría de la manera usual en la región $0 < r < R_0$. En efecto, si elegimos una distribución de potenciales “fuente” tal que $\sum_i \tilde{V}_i = 0$ en (16), entonces el término

monopolar se anula (a pesar del comportamiento divergente de $\ln x$) y el término dipolar se evalúa en $R_0 \gg R$ (i.e, $X_0 \gg X$ con $X \equiv R/a$):

$$V_D = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{P}}{x^2} = \frac{1}{X_0} \sum_i \tilde{V}_i \cos \phi_i x'_i \leq \frac{X}{X_0} \sum_i |\tilde{V}_i|, \quad (18)$$

de tal forma que $|V_D| \cong 0$.

5. EL CASO DEL DIPOLO

Esta configuración de cargas constituye el caso más sencillo con el que se puede verificar la aproximación dada por (18), pues para el dipolo se puede calcular fácilmente la solución analítica exacta que da la forma de las curvas equipotenciales en 2D.

Para los potenciales “fuente” $\tilde{V}_1 = -\tilde{V}_2 = V$ o bien $V_{a,1} = -V_{a,2} = V \ln(a/r_0)$ (correspondientes a las “cargas” bidimensionales $q_1 = -q_2 = q$) localizados en los puntos $(\pm h, 0)$ del plano XY^2 , el potencial exacto en $\mathbf{x}=(x_1, x_2)$ se calcula a partir de (10) como la contribución de dos términos monopoles:

$$\begin{aligned} V(x) &= V \ln \sqrt{(x_1 - h)^2 + x_2^2} - V \ln \sqrt{(x_1 + h)^2 + x_2^2} \\ &= \frac{V}{2} \ln \left[\frac{(x_1 - h)^2 + x_2^2}{(x_1 + h)^2 + x_2^2} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Si $V(\mathbf{x}) = C$ y $C' \equiv \exp(2C/V)$, las curvas equipotenciales corresponden a

$$\left(x_1 - \frac{C' + 1}{C' - 1} h \right)^2 + x_2^2 = h^2 \left[\left(\frac{C' + 1}{C' - 1} \right)^2 - 1 \right]. \quad (20)$$

Claramente (20) representa a una familia de circunferencias excéntricas cuyos centros se desplazan hacia los extremos del eje X a medida que sus radios respectivos crecen.

Para la simulación numérica en *Excel* se tomó $\Delta x = \Delta y = a$ (Fig.2) como la separación entre celdas adyacentes. Para la magnitud y ubicación de los potenciales “fuente” se tomó los valores $V_{a,1} = -V_{a,2} = 1$ V junto con $V = 0,26$ V (lo que supone una relación $a/r_0 = 46,8$ en (9)) y $h = 4$, así que la región de radio R en la Fig.1 corresponde a $X = 4$ en (18). La circunferencia que sirve como condición de contorno cerrada tiene un radio adimensional $X_0 = 50$, así que la contribución máxima del término dipolar V_D sobre esta circunferencia corresponde al eje del dipolo ($\phi_1 = \phi_2 = 0$) y coincide con la máxima cota superior en (18):

²La notación que se utiliza es $\mathbf{r} = a\mathbf{x} = (x, y)$ para el vector posición medido en unidades de longitud, donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ es el vector posición adimensional y $\Delta x = \Delta y = a$ es el tamaño de la celda en las simulaciones numéricas. Ya que el símbolo “ x ” puede representar la componente x del vector \mathbf{r} o bien la magnitud del vector \mathbf{x} , entonces el contexto correspondiente debe aclarar a qué “ x ” se está refiriendo el uso de este símbolo.

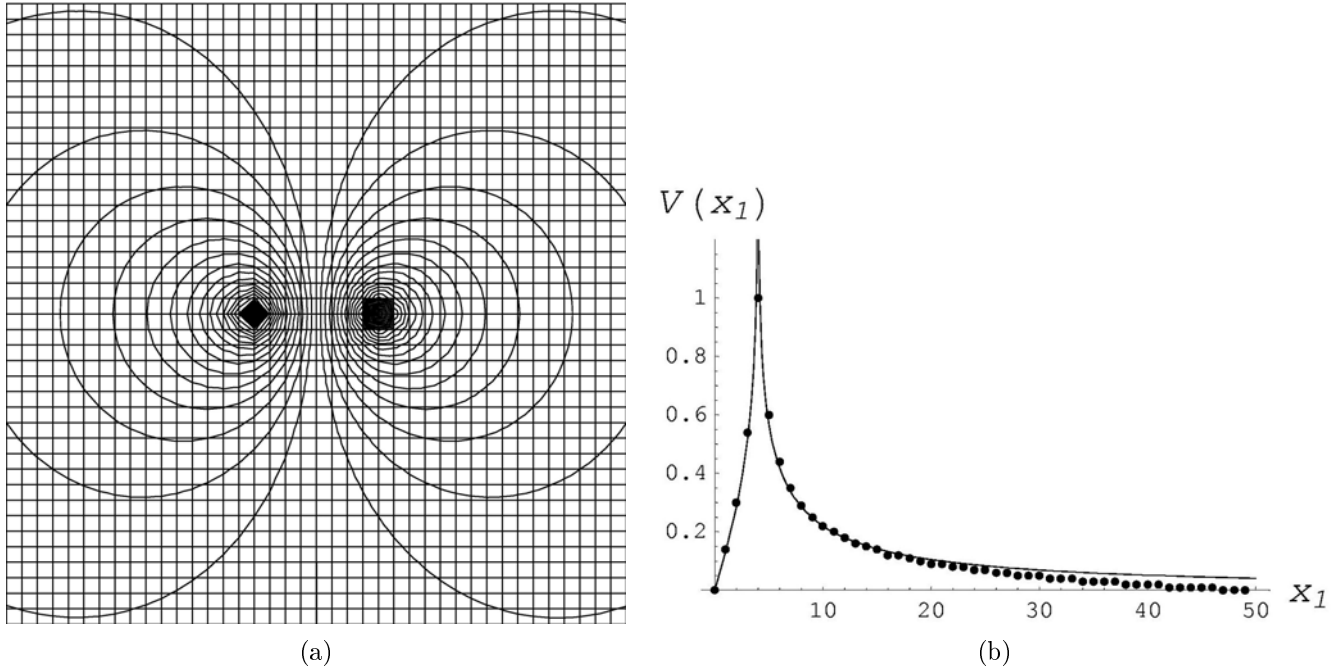


Figura 3.

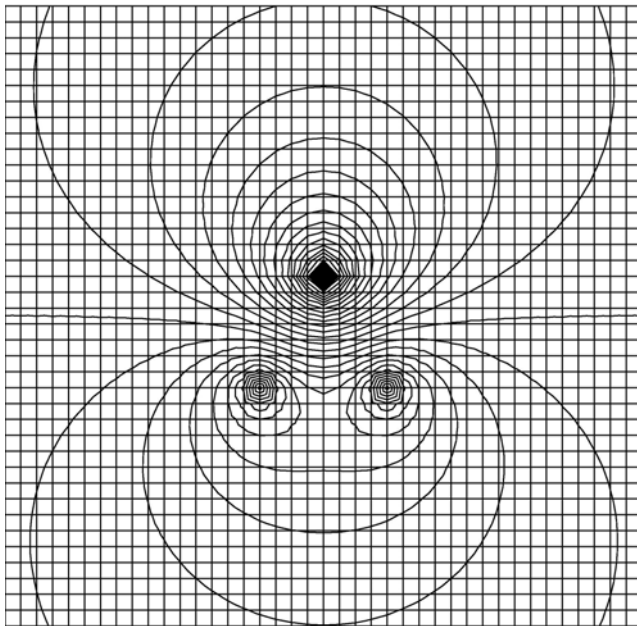


Figura 4.

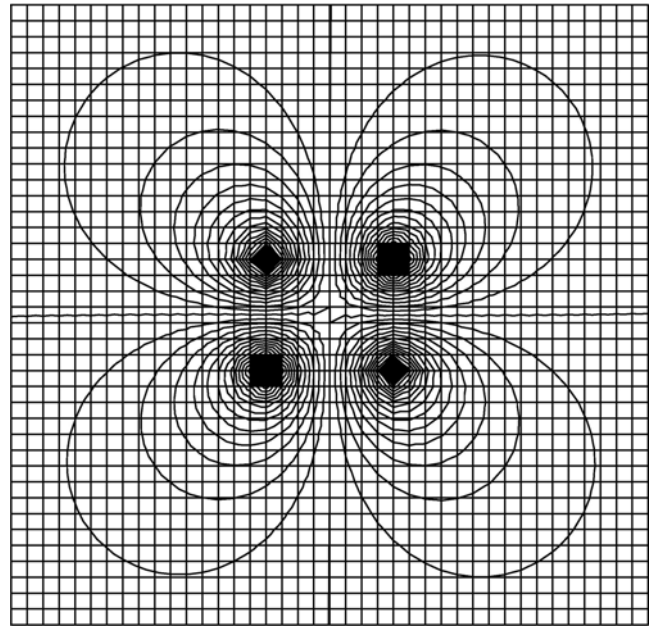


Figura 5.

$$\begin{aligned} \frac{1}{X_0} \left(\tilde{V}_1 h \cos \phi_1 + \tilde{V}_2 (-h) \cos \phi_2 \right) &= \frac{X}{X_0} \sum_i |\tilde{V}_i| \\ &= \frac{4}{50} (0,26 + 0,26) \cong 0,04 \text{ V.} \quad (21) \end{aligned}$$

Esto significa que la contribución dipolar V_D sobre dicha circunferencia toma los valores $-0,04 \leq V_D(\mathbf{X}_0) \leq 0,04$, así que la condición de contorno efectiva que se

tomará es $V(\mathbf{X}_0)=0$.

En la Fig.3a se muestra el resultado de esta simulación para una ventana correspondiente a los intervalos $x_1 \in [-20, 20]$ y $x_2 \in [-20, 20]$. Nótese que en la región $x_1 \in [-13, 13]$ y $x_2 \in [-13, 13]$ aún las curvas equipotenciales se aproximan a circunferencias. A medida que la ventana va creciendo hasta abarcar la región total de radio $X_0 = 50$, la forma de las curvas equipotenciales se va “achatando” horizontalmente debido a la condición de

contorno $V(\mathbf{X}_0)=0$. En la Fig.3b se muestra una comparación entre los valores numéricos del potencial calculados según el método de relajación (puntos negros) y los valores *exactos* del potencial según la fórmula analítica (19) (curva continua). En ambos casos se eligió graficar el potencial a lo largo del eje del dipolo (eje X) correspondiente a $x_1 \in [0,50]$ y $x_2=0$. Como se observa en la Fig.3a, es a lo largo de este eje en donde se debe registrar la mayor discrepancia entre la teoría y la simulación numérica, ya que es aquí en donde se acentúa el “achataamiento” de las circunferencias equipotenciales predichas por (19). Nótese que el potencial exacto es singular en $x_1=4$ pues corresponde a una “carga” puntual; sin embargo, el valor elegido del potencial “fuente” debido a esta “carga” es $V_{a,1}=1$ V, esto es, el potencial a una distancia $a=46,81r_0$ de la “carga” puntual, donde r_0 es la distancia convenida para que el potencial sea cero. Tomando pues $V_{a,1}=1$ V como referencia, el error porcentual entre los valores teórico y numérico del potencial en $x_1=50$ es aproximadamente 4%, lo que coincide razonablemente bien con la contribución dipolar calculada en (21).

6. OTRAS DISTRIBUCIONES DE CARGA

Para las distribuciones de carga que se muestran a continuación, el cálculo analítico exacto de $V(\mathbf{x})$, si bien no es complicado, ya no conduce a fórmulas sencillas para las curvas equipotenciales al establecer $V(\mathbf{x})=C$. Es así que la simulación numérica y la apreciación cualitativa de los gráficos de curvas equipotenciales puede ofrecer una guía valiosa que permita dilucidar características físicas de estos sistemas. Veamos algunos casos.

a) “Tripolo”.- Para una distribución de tres cargas ubicadas en $\mathbf{x}_1=(-4, -4)$, $\mathbf{x}_2=(4, -4)$, $\mathbf{x}_3=(0, 3)$ y que producen los potenciales “fuente” con valores $V_{a,1} = V_{a,2} = -V_{a,3}/2 = 1$ V respectivamente, la contribución monopolar de $V(\mathbf{x})$ en (16) es cero. La contribución máxima de V_D sobre la circunferencia de radio $X_0 = 50$ ocurre a lo largo del eje dipolar del tripolo y corresponde a $|V_D|=0,018$ V. Fijando pues la condición de contorno $V(\mathbf{X}_0) = 0$ se obtiene la familia de curvas equipotenciales que se muestra en la Fig.4. Nótese que en los contornos de la ventana de esta figura, las curvas tienden a formar “circunferencias” achatadas similares a las de la Fig.3a, lo que refleja el comportamiento dipolar de esta distribución en el campo lejano.

b) Cuadrupolo.- Para una distribución de cuatro cargas ubicadas en $\mathbf{x}_1 = (-4, 4)$, $\mathbf{x}_2 = (-4, -4)$, $\mathbf{x}_3 = -\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_4 = -\mathbf{x}_2$, y que producen los potenciales con valores $V_{a,1} = -V_{a,2} = V_{a,3} = -V_{a,4} = 1$ V respectivamente, tanto la contribución monopolar como dipolar de $V(\mathbf{x})$ en (16) es cero, así que la condición de contorno $V(\mathbf{X}_0) = 0$ es muy adecuada. En la Fig.5 se puede apreciar las correspondientes curvas equipotenciales.

c) Pieza metálica continua.- En este caso se simula una pieza metálica continua por la yuxtaposición de 26 celdas con potenciales “fuente” de igual valor

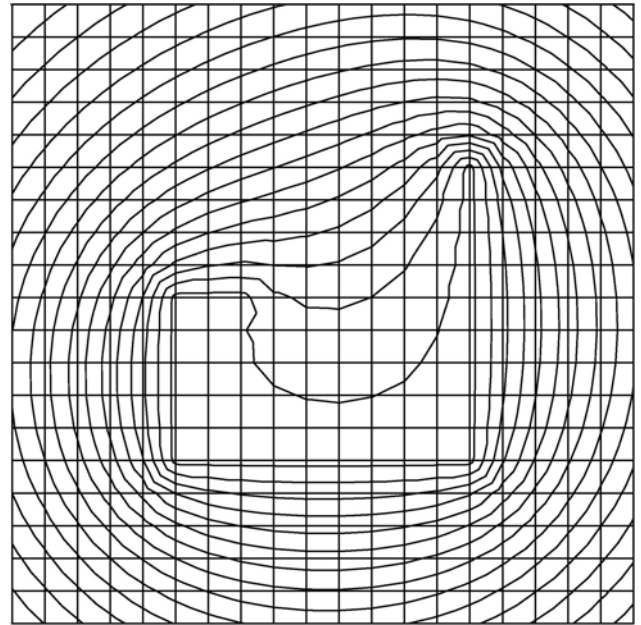


Figura 6.

$V_{a,i} = 1$ V ($1 \leq i \leq 26$). Las contribuciones monopolar (V_M) y dipolar (V_D) de $V(\mathbf{x})$ en (16) son diferentes de cero. La primera contribución tiene una magnitud sobre la circunferencia de radio $X_0 = 50$ igual a $|V_M(\mathbf{X}_0)| \cong 26,44$ V, mientras que la magnitud de la segunda contribución tiene una máxima cota superior de magnitud $|V_D(\mathbf{X}_0)| \cong 0,68$ V. Por lo tanto, ya que V_M es dominante sobre V_D , se puede tomar el valor de V_M como la condición de contorno. Sin embargo, recordemos que el potencial eléctrico está determinado a menos de una constante aditiva, e.g. (9) y (10), así que bien se puede obtener *la misma* distribución geométrica de curvas equipotenciales para esta pieza tomando como condición de contorno $V(\mathbf{X}_0) = 0$. Esto es lo que se muestra en la Fig.6.

7. CONCLUSIONES

En este trabajo se adaptó el algoritmo de relajación usual en 2D dado por (3) utilizando $V(\mathbf{X}_0) = 0$ como una condición de contorno *efectiva* (de Dirichlet) cerrada, donde $R_0 = aX_0$ es el radio de una circunferencia suficientemente grande con relación al círculo de radio $R = aX$ que contiene a una distribución arbitraria (continua o discreta) de cargas eléctricas. La relación que se usó a lo largo de este trabajo fue $X/X_0 = 0.1$ con $X = 5$. Las simulaciones numéricas muestran la distribución de curvas equipotenciales en la región $0 \leq x \leq X_0$ ($x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$). Observando la simulación para el caso del dipolo, esta región se puede dividir en tres regiones: el “campo cercano”: $0 \leq x \leq 5$, el “campo intermedio”: $5 \leq x \leq 20$ y el “campo lejano”: $20 \leq x \leq 50$. En el campo lejano las curvas equipotenciales ya pierden su forma circular debido a que la condición de contorno aproximada $V(\mathbf{X}_0) = 0$ no es muy buena

para las distribuciones de carga que tienen momento dipolar diferente de cero. Sin embargo, en el campo intermedio –y por lo tanto en el campo cercano– la aproximación $V(\mathbf{X}_0) = 0$ es suficientemente buena. Para el caso del cuadrupolo se puede suponer que en el campo lejano el cálculo de las curvas equipotenciales sea bueno, ya que esta distribución no tiene momento dipolar. Una forma de subsanar la limitación impuesta por $V(\mathbf{X}_0) = 0$ es calcular *exactamente* la contribución del momento dipolar de la distribución arbitraria de carga sobre la circunferencia de radio X_0 , y así tener el valor de $V(\mathbf{X}_0)$ exacto como condición de contorno *efectiva* cerrada en el campo lejano. Este trabajo adicional seguramente mejoraría el cálculo de las curvas equipotenciales, pero se incluiría en una próxima publicación a propósito de un método numérico práctico para la “triangulación del dipolo”, i.e., hallar, mediante mediciones del potencial en el campo lejano, el momento dipolar equivalente de una distribución arbitraria de

“cargas” en 2D. La aplicación del algoritmo de relajación (3) puede constituir una poderosa herramienta de simulación numérica para problemas que ya no se pueden tratar analíticamente de una manera práctica, como pueden ser los casos del “tripolo” (Fig.4) o de la pieza metálica continua (Fig.6), donde la pérdida de una o varias simetrías complica notablemente el problema.

REFERENCIAS

- [1] Press W. *et al.*, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* (Cambridge University Press, 1986).
- [2] Jackson J., *Classical Electrodynamics* (3ra. ed., Wiley, 1999).
- [3] Purcell E., *Electricidad y Magnetismo (Berkeley Physics Course vol.2, Reverté, 1988).*
- [4] Tijonov A., Samarsky A., *Ecuaciones de la Física Matemática* (Mir, Moscú, 1980).
- [5] Butkov E., *Mathematical Physics* (Addison-Wesley, 1973).