

# SINCRONIZACIÓN Y TRANSIENTES EN CONFIGURACIONES UNIDIMENSIONALES DE OSCILADORES FOTOCONTROLADOS LOCALMENTE ACOPLADOS

G. M. Ramírez Ávila<sup>1</sup>, J.-L. Guisset<sup>2</sup>, J.-L. Deneubourg<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés, Casilla 8635. La Paz, Bolivia

<sup>2</sup>Centre for Nonlinear Phenomena and Complex Systems, Universidad Libre de Bruxelles, CP231 Campus Plaine, Bld. du Triomphe 1050. Bruselas, Bélgica

## RESUMEN

En el presente trabajo, se analizan diversas configuraciones unidimensionales de osciladores fotocontrolados localmente acoplados: con condiciones de borde libre (lineal) y condiciones de borde periódicas (anular). Para el análisis, se utilizó el modelo físico-matemático que se introdujo en [1], del cual se resolvieron numéricamente las ecuaciones diferenciales para diferentes situaciones: osciladores idénticos, no idénticos, e idénticos despreciando los efectos sobre la etapa de descarga de los osciladores (lo que los aproxima a los osciladores de integración y disparo). En cada uno de los casos se consideraron poblaciones de osciladores que van entre 2 y 25 y tomando en consideración una amplia variación en lo que respecta a los valores de acoplamiento. Para el análisis se han utilizado como criterios de sincronización el cumplimiento de enganche de períodos y de enganche de períodos y fases simultáneamente. Para cada uno de los casos, se identifican regiones de sincronización en el plano acoplamiento versus número de osciladores. Finalmente, se analizan los transientes para todos los casos estudiados.

## 1. INTRODUCCIÓN

Muchos trabajos han sido dedicados al estudio de diferentes tipos de osciladores localmente acoplados en configuraciones unidimensionales. Fenómenos tales como el enganche de fases [2][3], secuencias de osciladores con las mismas frecuencias [4], transiciones de fase [5], formación de patrones [6], ondas viajeras [7], y formación de cúmulos [8] (para una explicación detallada de formación de cúmulos en diferentes sistemas, véase [9]) son comunes en cadenas de osciladores; todos estos fenómenos están ligados a la sincronización, es decir, al ajuste de ritmos de objetos oscilantes debido a sus interacciones, que en general son débiles [10]. Los osciladores de integración y disparo han sido ampliamente utilizados para describir y modelar una gran variedad de fenómenos. tales como la sincronización en luciérnagas [11], la dinámica de neuronas [12] y las oscilaciones de las mismas [13]. Un oscilador de integración y disparo es un oscilador de relajación típico y está caracterizado por una variable de estado similar al voltaje  $V$ , la cual crece hasta alcanzar un umbral para luego “disparar” haciendo que  $V$  vuelva instantáneamente a su nivel de base. Recientemente, un nuevo tipo de oscilador que describe fenómenos de sincronización de una forma muy sencilla ha sido introducido [14][15][1] y se los ha denominado osciladores fotocontrolados, para los cuales se utiliza la abreviación LCO proveniente del inglés Light-Controlled Oscillator. La motivación original de este oscilador fue la de modelar la comunicación en algunos sistemas biológicos, tales como el de luciérnagas, pero se pudo verificar que este oscilador puede tener otro tipo de aplicaciones. Este trabajo es una extensión de re-

sultados previamente obtenidos para cadenas pequeñas de 2 y 3 LCOs. En el presente trabajo, se extiende el análisis a poblaciones más grandes de LCOs que van de 2 a 25 osciladores y en dos configuraciones parecidas. En este artículo, se estudia y caracteriza el comportamiento síncrono en configuraciones con condiciones de borde libres (lineal) y periódicas (anular) de LCOs (Fig. 1). En § 2 se describe el modelo y los criterios de sincronización. En § 3 se presentan los resultados. Finalmente, en § 4 se discuten los resultados, comparándolos con otros previamente publicados en los cuales se trabajaba con osciladores distintos a los LCOs.

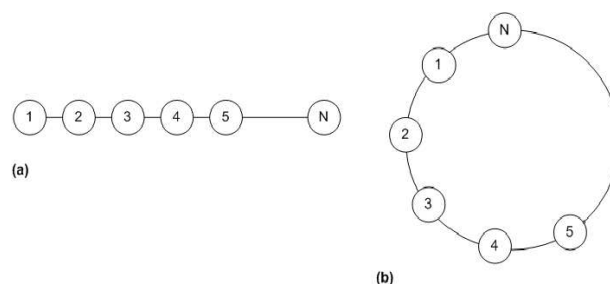


Figura 1. Configuraciones de osciladores localmente acoplados. (a) Lineal (condiciones de borde libres). (b) Anular (condiciones de borde periódicas).

## 2. EL MODELO

Como fue descrito en [14][15][1], un LCO es un oscilador electrónico de relajación en el sentido de que este posee dos escalas de tiempo, las cuales están asociadas

a ciclos en los que se tienen variaciones de voltaje lentas (etapa de carga) y variaciones de voltaje rápidas (etapa de descarga y en la cual el LCO emite un pulso luminoso). Cada LCO consiste de un chip LM555 conectado para funcionar en su modo oscilatorio astable. El inicio de las etapas de carga y descarga están determinados por dos umbrales bien definidos y situados a  $V_M/3$  y  $2V_M/3$  respectivamente; siendo  $V_M$  el voltaje de la fuente. El período de un LCO está relacionado con los valores de las resistencias ( $R_\lambda, R_\gamma$ ) y del condensador ( $C$ ) y está dado por  $T = T_\lambda + T_\gamma$ , donde  $T_\lambda = (R_\lambda + R_\gamma)C \ln 2 = \ln 2/\lambda$  es el intervalo de tiempo en el cual toma lugar la carga y  $T_\gamma = R_\gamma C \ln 2 = \ln 2/\gamma$  el correspondiente a la etapa de descarga. Un LCO está caracterizado por el voltaje de salida  $V(t)$  tomado en la pata 3 del chip LM555. Los LCOs pueden interactuar entre ellos por medio de pulsos luminosos, por lo que están equipados con fotosensores y LEDs que posibilitan el acoplamiento óptico. Los fotosensores actúan como fuentes de corriente cuando están recibiendo luz, haciendo que el tiempo de carga del condensador se acorte y/o haciendo que el tiempo de descarga del mismo se alargue (una descripción detallada del circuito y su funcionamiento se da en [14][15]).

Las ecuaciones que describen el modelo para  $N$  LCOs son:

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(t)}{dt} = & \lambda_i [(V_{Mi} - V_i(t))\epsilon_i(t) - \gamma_i V_i(t)[1 - \epsilon_i(t)] \\ & + \sum_{i,j}^N \beta_{ij} \delta_{ij} [1 - \epsilon_j(t)], \quad i, j = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $\beta_{ij}$  es la intensidad de acoplamiento,  $\delta_{ij} = 1$  si los LCOs pueden interactuar y  $\delta_{ij} = 0$  en otro caso, y  $\epsilon_i(t)$  es el estado del oscilador que toma el valor 1 (etapa de carga) ó 0 (etapa de descarga);  $\epsilon_i(t)$  cambia su valor cuando se alcanza el umbral superior ( $2V_M/3$ ) o el umbral inferior ( $V_M/3$ ). Se debe mencionar que el modelo ha sido validado experimentalmente [1].

Utilizando (1), se pueden escribir las ecuaciones correspondientes a cada uno de los casos estudiados. En el caso de LCOs idénticos en una configuración lineal:

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(t)}{dt} = & \lambda(V_M - V_1(t))\epsilon_1(t) - \gamma V_1(t)[1 - \epsilon_1(t)] \\ & + \beta[1 - \epsilon_2(t)], \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(t)}{dt} = & \lambda(V_M - V_i(t))\epsilon_i(t) - \gamma V_i(t)[1 - \epsilon_i(t)] \\ & + \beta[2 - \epsilon_{i-1}(t) - \epsilon_{i+1}(t)], \quad 1 < i < N, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_N(t)}{dt} = & \lambda(V_M - V_N(t))\epsilon_N(t) - \gamma V_N(t)[1 - \epsilon_N(t)] \\ & + \beta[1 - \epsilon_{N-1}(t)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Para LCOs idénticos en una configuración lineal y despreciando la influencia sobre la etapa de descarga, se tendrá que el acoplamiento  $\beta$  sólo puede actuar en el

término de carga. Como consecuencia de ello,  $\beta$  siempre estará ligado al término de carga y el tiempo del proceso de descarga (duración del pulso luminoso) será constante. Las ecuaciones en este caso están dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(t)}{dt} = & [\lambda(V_M - V_1(t)) + \beta(1 - \epsilon_2(t))]\epsilon_1(t) \\ & - \gamma V_1(t)[1 - \epsilon_1(t)], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(t)}{dt} = & [\lambda(V_M - V_i(t)) + \beta(2 - \epsilon_{i-1}(t) - \epsilon_{i+1}(t))]\epsilon_i(t) \\ & - \gamma V_i(t)[1 - \epsilon_i(t)], \quad 1 < i < N, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_N(t)}{dt} = & [\lambda(V_M - V_N(t)) + \beta(1 - \epsilon_{N-1}(t))]\epsilon_N(t) \\ & - \gamma V_N(t)[1 - \epsilon_N(t)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Para LCOs que no son idénticos y acoplados en una configuración lineal, la descripción se hace con (2)–(4), excepto por el hecho de que cada LCO tendrá un parámetro  $\lambda$  diferente. Para la configuración anular, las ecuaciones permanecen prácticamente inalteradas con la condición  $\epsilon_{N+1} = \epsilon_1$  debida a las condiciones de borde periódicas, lo que da:

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(t)}{dt} = & \lambda(V_M - V_i(t))\epsilon_i(t) - \gamma V_i(t)[1 - \epsilon_i(t)] \\ & + \beta[2 - \epsilon_{i-1}(t) - \epsilon_{i+1}(t)], \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (8)$$

para osciladores idénticos,

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(t)}{dt} = & [\lambda(V_M - V_i(t)) + \beta(2 - \epsilon_{i-1}(t) - \epsilon_{i+1}(t))]\epsilon_i(t) \\ & - \gamma V_i(t)[1 - \epsilon_i(t)], \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (9)$$

para osciladores idénticos en los que se desprecia las variaciones en la descarga. Finalmente, como en el caso de la configuración lineal, en el caso de osciladores no idénticos, el parámetro  $\lambda$  será diferente para cada oscilador.

### 2.1. Criterios de sincronización

Se utilizaron dos criterios para estudiar la sincronización, el primero considera eventos de encendido casi simultáneos con diferencias de fase constantes, en tanto que el segundo, considera la igualdad de períodos como criterio para la sincronización. El criterio de la diferencia de fases (CDF) es bastante fuerte, en el sentido que sólo se consideran como sincronizados a aquellos LCOs que están emitiendo sus pulsos luminosos casi simultáneamente y que mantienen sus diferencias de fase constantes, mientras que en el criterio del período (CP), la simultaneidad de los eventos de encendido no es estrictamente necesaria.

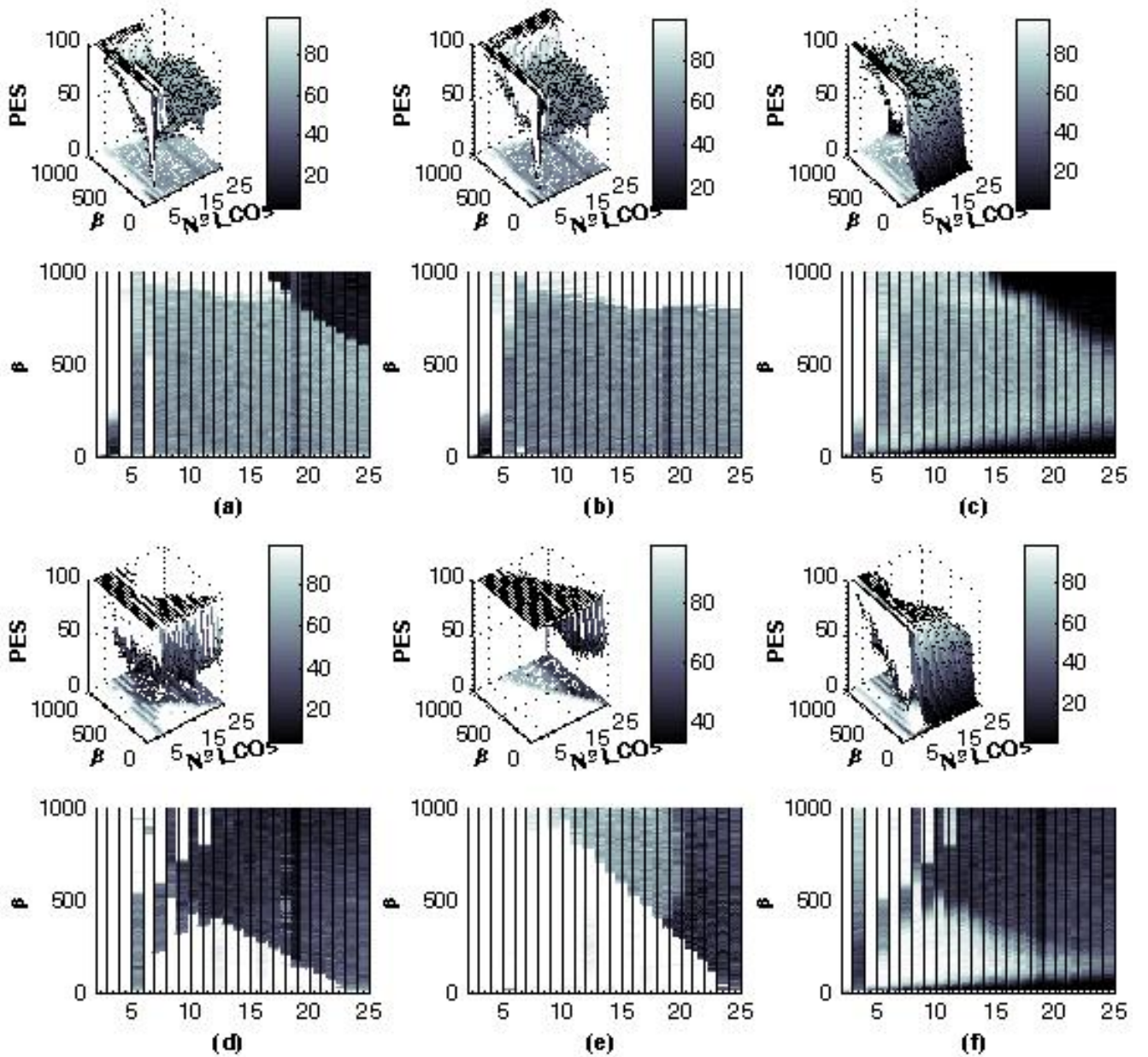


Figura 2. Criterio de la diferencia de fase para la sincronización en una configuración lineal (primera fila) y en una configuración anular (segunda fila) para LCOs idénticos (a) y (d), LCOs idénticos LCOs despreciando los cambios en la etapa de descarga (b) y (e), y para LCOs no idénticos (c) y (f). La escala de colores representa el porcentaje de eventos sincronizados.

### 3. RESULTADOS

Utilizando observaciones experimentales y numéricas, se mostró en [1] una fuerte dependencia a las condiciones iniciales incluso para sistemas compuestos sólo por 2 LCOs. Se resolvieron numéricamente las ecuaciones para cadenas de 2 a 25 LCOs, variando el acoplamiento desde  $\beta = 10$  hasta  $\beta = 1000$  en pasos de  $\Delta\beta = 10$  y realizando 100 simulaciones para cada caso con el fin de obtener una buena estadística. Se utilizaron los siguientes valores de parámetros:  $R_\lambda = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $R_\gamma = 1,6 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 0,47 \text{ }\mu\text{F}$ . Cuando los LCOs no son idénticos,  $\lambda_i = 1/(R_\lambda + \xi_i + R_\gamma)C$ , donde  $\xi_i$  es un número aleatorio que sigue una distribución Gaussiana con

media igual a cero y varianza igual a  $10^4 \Omega$ . Para el caso en el que la sincronización no es alcanzada, se observa un mínimo de 7500 eventos de encendido.

Para visualizar el comportamiento sincrónico de los LCOs utilizando ambos criterios, se construyeron las figuras 2 y 3 las cuales muestran la proyección sobre el plano número de osciladores ( $N$ )-acoplamiento ( $\beta$ ), con el porcentaje de eventos sincronizados (PES) representado por la escala de colores.

Se encuentra que las superficies generadas por los criterios anteriores y configuraciones, no están correlacionadas de manera simple. Para determinar cuál de las configuraciones maximiza el PES, se obtiene el valor me-

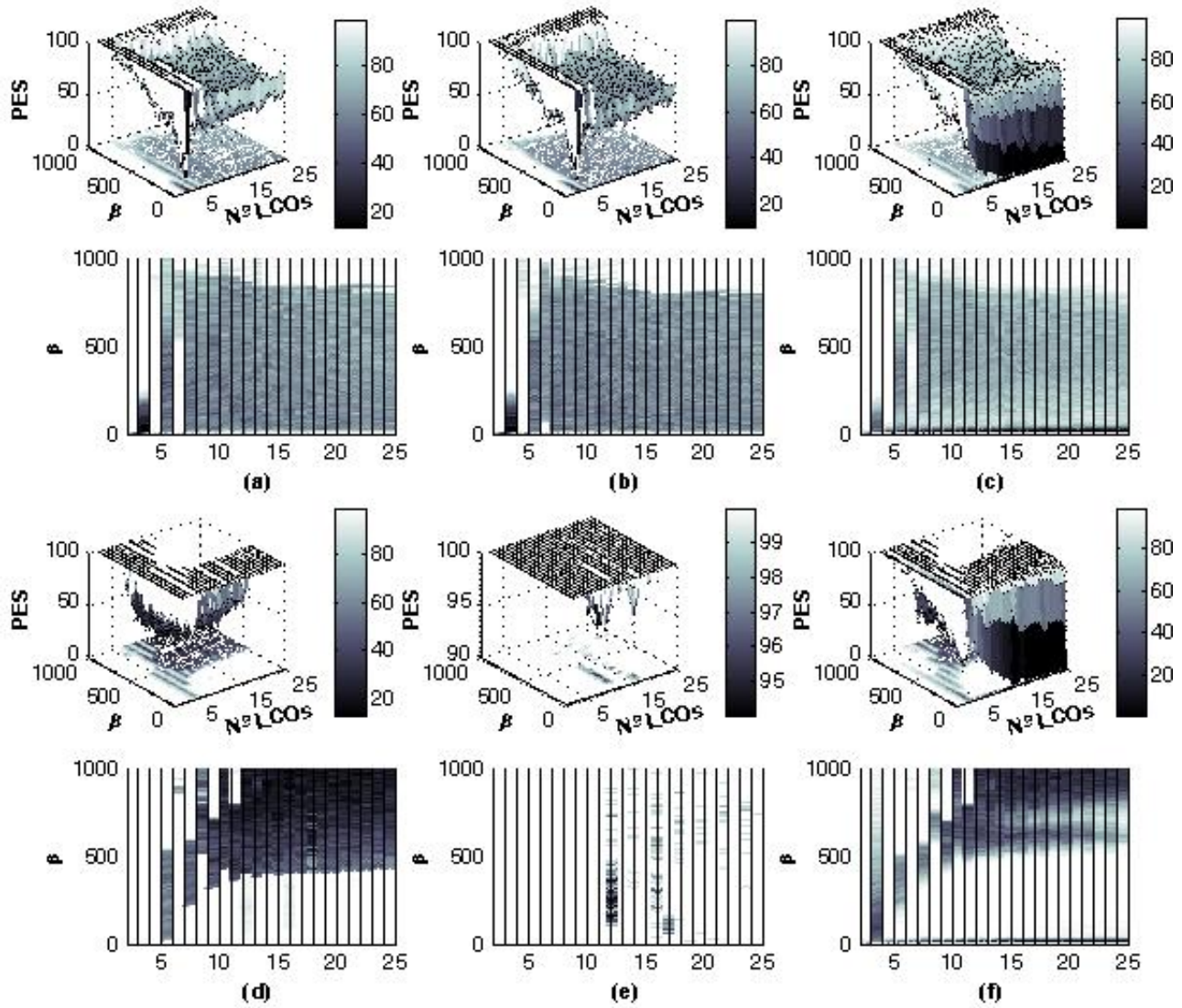


Figura 3. Idem que en la figura 2 pero utilizando el criterio del período para la sincronización.

dio según:

$$\langle PES \rangle = \frac{1}{N_{\max} - N_{\min} + 1} \frac{\Delta\beta}{\beta_{\max} - \beta_{\min} + 1} \times \sum_{i=N_{\min}}^{N_{\max}} \sum_{j=\beta_{\min}/\Delta\beta}^{\beta_{\max}/\Delta\beta} PES_{ij}, \quad (10)$$

donde, en nuestro caso,  $N_{\max} = 25$ ,  $N_{\min} = 2$ ,  $\beta_{\max} = 1000$ ,  $\beta_{\min} = 10$ , y como se especificó anteriormente,  $\Delta\beta = 10$ . Considerando que la desviación estándar  $\sigma_i$ ,  $i = N_{\min} \dots N_{\max}$ , constituye la incertidumbre cuando se calcula el valor medio del PES para cada configuración con un número de LCOs dado, en consecuencia, se puede estimar la incertidumbre total para el PES (para todo  $N$  y para todo  $\beta$ ), utilizando:

$$E_{PES} = \sqrt{\sum_{i=N_{\min}}^{N_{\max}} \sigma_i^2}. \quad (11)$$

Los valores y sus respectivas incertidumbres, se muestran en la Tab. 3).

Utilizando el CP, los valores del PES son mayores que utilizando el CDF, puesto que como se señaló anteriormente, este último es un criterio más fuerte. A partir de los resultados que se muestran en la Tab. 3 se constata que considerando LCOs idénticos en configuración anular para los cuales se desprecia la acción sobre la descarga, el PES es mayor que en los otros casos, tanto para el CDF como para el CP. Esto no es sorprendente ya que el hecho de despreciar los efectos sobre la descarga, hace que los LCOs se aproximen a los osciladores de integración y disparo para los cuales la sincronización total es prácticamente siempre alcanzada [11], es decir, 100% en términos del PES. Por otro lado, si se comparan las situaciones para LCOs idénticos y no idénticos, se observa que utilizando el CDF, el valor del PES es ligeramente mayor para LCOs idénticos que utilizando el CP; al contrario, utilizando el CP el resultado se invierte y los

TABLA 1

Valores promedio e incertidumbres de los PES, utilizando todos los valores de  $N$  y  $\beta$  para los LCOs acoplados en configuraciones lineal y anular y usando como criterio de sincronización la constancia y limitación de las diferencias de fase y la igualdad de períodos respectivamente.

Configuración	Criterio de sincronización	
	Diferencia de fase	Período
<b>Lineal</b>		
LCOs idénticos	$66,28 \pm 3,51$	$73,55 \pm 2,68$
LCOs idénticos despreciando la acción sobre la descarga	$70,33 \pm 3,15$	$71,14 \pm 3,08$
LCOs no idénticos	$61,50 \pm 4,25$	$77,81 \pm 2,93$
<b>Anular</b>		
LCOs idénticos	$58,21 \pm 5,28$	$69,32 \pm 6,08$
LCOs idénticos despreciando la acción sobre la descarga	$85,38 \pm 2,19$	$99,88 \pm 0,10$
LCOs no idénticos	$52,70 \pm 4,41$	$77,75 \pm 5,56$

valores del PES es ligeramente mayor en el caso de LCOs no idénticos. Esto podría significar que para LCOs no idénticos acoplados, estos sincronizan formando cúmulos con períodos iguales pero con tiempos de encendido diferentes.

El tiempo de sincronización en sistemas de mapas acoplados [16][17] y de osciladores [18][19][20] fue estudiado aunque sin llegar a resultados analíticos contundentes [21]. En los trabajos anteriormente citados, parece haber una ley de escala en el tiempo en el cual el sistema llega a sincronizar. En cuanto a los tiempos de sincronización o transientes en nuestros LCOs, se estudiaron los mismos para ambas configuraciones considerando un valor de  $\beta = 166$  para la intensidad de acoplamiento y además la situación de osciladores idénticos. Los resultados se pueden expresar por medio de la Fig. 4, en la cual se observa que una fuerte dependencia del tiempo de sincronización con el número de LCOs. Para la configuración lineal y con 3 LCOs (la situación más asimétrica), se ve que el tiempo de sincronización aumenta abruptamente así como el error correspondiente. Se puede ver también que para 13 LCOs, el transiente toma menos tiempo que en los casos con número de LCOs menor; además, parece haber una escala diferente Fig. 4(c) para configuraciones en las que el número de LCOs es primo (13,17,19 y 23 en este caso)

donde se puede destacar que también parece haber una influencia dada por la paridad o no en el número de LCOs.

#### 4. DISCUSIÓN

Nuestros resultados muestran que no hay un comportamiento exactamente predecible. Esto podría estar relacionado con el hecho de que los LCOs son sensibles a las condiciones iniciales, como se ha demostrado para 2 y 3 LCOs [1]. Por lo que, cuanto mayor sea la población, más difícil es predecir el comportamiento del sistema. Sin embargo, las simulaciones permiten identificar regiones en las cuales es más probable de observar sin-

cronización total. Los resultados muestran además que en una cadena lineal, la sincronización es común para cantidades pequeñas de LCOs, pero para 3 y 5 LCOs el PES cae drásticamente; Para más de 6 LCOs, el PES es de alrededor de 70% en una amplia región de valores de acoplamiento. Despreciando la acción sobre la descarga, para LCOs idénticos acoplados en una configuración lineal, ambos criterios de sincronización dan resultados casi idénticos. La diferencia con respecto al caso del modelo completo es que para acoplamientos fuertes, el PES alcanza valores cercanos al 100% usando el modelo simplificado, una situación que no se presenta en el modelo completo donde utilizando el criterio de la diferencia de fase como criterio de sincronización, el PES disminuye notoriamente para acoplamientos fuertes. En el caso de cadenas lineales de LCOs no idénticos, dependiendo del criterio de sincronización utilizado, el plano  $\beta$  vs.  $N$  muestra regiones que difieren considerablemente del caso de LCOs idénticos. Por ejemplo, en el caso de acoplamientos débiles, un dominio con PESs bajos aparece utilizando el CDF; sin embargo, en el resto de este plano, el PES es un poco mayor. Para cadenas anulares y para acoplamientos débiles, ambos criterios muestran PESs cercanos al 100% lo que no parece depender del número de LCOs; aunque, para 5 LCOs este no es el caso y esto puede estar relacionado con los resultados hallados para 5 osciladores en cadenas de osciladores multi-acoplados [3], donde los osciladores de los extremos se “deslizan” y no son capaces de enganchar sus fases con los osciladores del interior de la cadena. Para la llamada configuración de “doble anillo” descrita en [22] (una cadena anular en nuestro caso) con osciladores no idénticos, estos autores encontraron que un estado síncrono colapsa para una geometría de 13 osciladores, teniendo como consecuencia que la sincronización para  $N$  grande no puede subsistir pero produce una forma de sincronización débil en la cadena, es decir, grupos de osciladores vecinos que oscilan con la misma frecuencia en promedio pero no necesariamente con una relación de fases bien establecida. Se

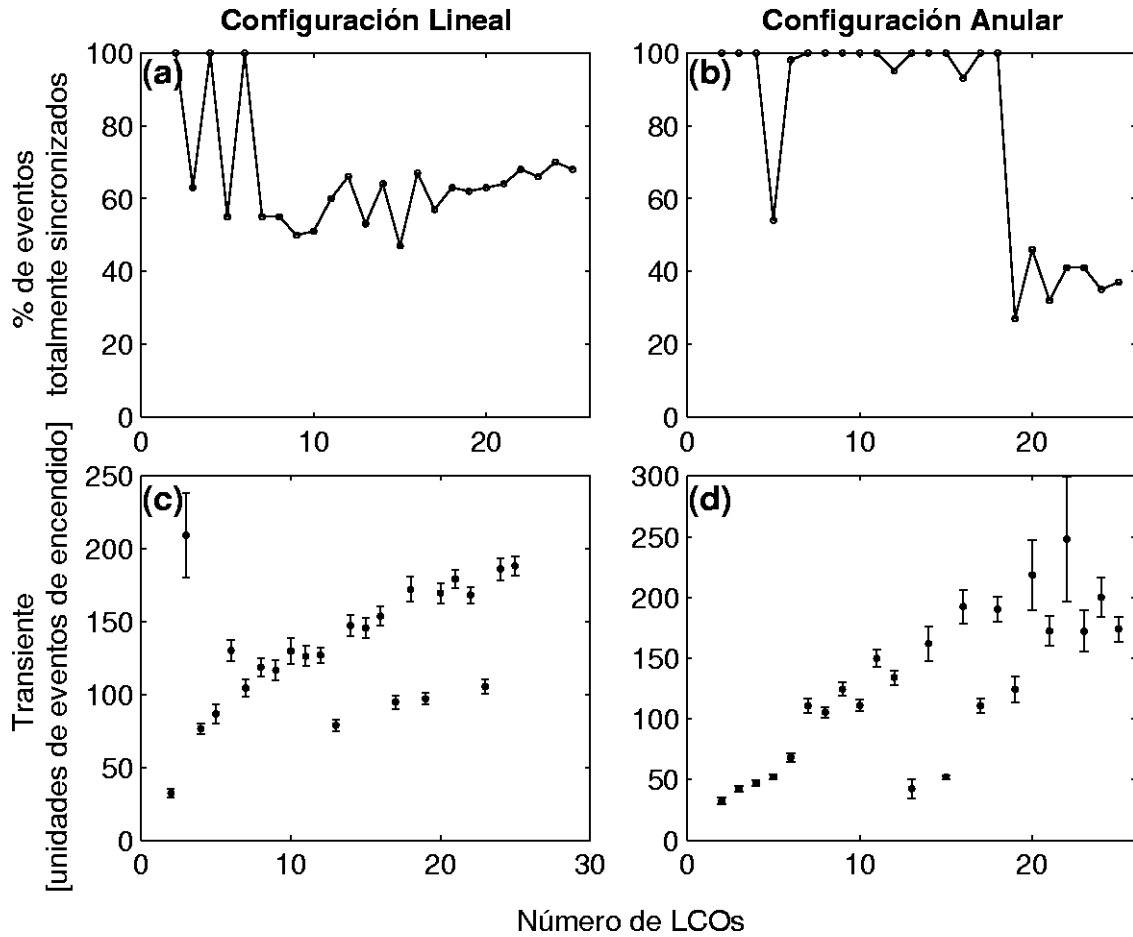


Figura 4. Porcentaje de eventos sincronizados para las configuraciones lineal (a) y anular (b). Transientes en unidades de eventos de encendido para las configuraciones lineal (c) y anular (d). Estas magnitudes se expresan en función del número de osciladores, siendo que ellos están acoplados con una intensidad  $\beta = 166$ .

obtuvo un resultado similar al de [22] pero para ambos casos, a saber, LCOs idénticos y no idénticos en una configuración anular para una amplia región de valores de acoplamiento. Además, estos resultados confirman lo correcto de ambos criterios de sincronización. Para LCOs idénticos acoplados en una cadena anular y despreciando la influencia sobre la etapa de descarga, se tiene que el PES es prácticamente de 100 % en todos los casos tal como en los resultados hallados por diferentes autores (ver por ejemplo [23][24]). Ellos aseguran que para redes uni y bidimensionales de osciladores de integración y disparo, siempre habrá sincronización aún cuando esta pueda tomar un tiempo muy largo en producirse. De acuerdo con [24], el tiempo de sincronización es de alrededor 100 períodos para una red de  $40 \times 40$  o que el tiempo promedio de sincronización aumenta logarítmicamente con el tamaño del sistema [23]. Está claro que despreciar los efectos sobre la descarga constituye una aproximación a los osciladores de integración y disparo. En este trabajo, se encontró que en promedio, la situación de LCOs no idénticos muestra valores mayores del PES que para el caso de LCOs idénticos cuando se utiliza el criterio del período, por esto, un estudio más profundo de situacio-

nes con osciladores no idénticos podría ser importante para confirmar esta diferencia. Nuestra hipótesis es que esto debería ser confirmado, puesto que los sistemas reales que alcanzan sincronización robusta, están compuestos de osciladores no idénticos y las pequeñas diferencias deberían facilitar la sincronización como se observa en la naturaleza [25]. Finalmente, en lo concerniente a los tiempos de sincronización, los resultados muestran que estos tiempos aumentan con el número de osciladores y dependen también de la configuración que tiene el sistema.

#### AGRADECIMIENTOS

Se agradece a los organizadores de la International Conference on Control and Synchronization of Dynamical Systems, en particular al Prof. Alexander Pisarchik por el apoyo dado para que parte de estos resultados puedan ser comunicados en dicha conferencia que se llevó a cabo en León, México del 4 al 7 de octubre de 2005.

## REFERENCIAS

- [1] Ramírez Ávila, G. M., Guisset, J. L. & Deneubourg, J. L., “Synchronization in light-controlled oscillators”, *Physica D*, 182, 3-4, 254-273, 2003
- [2] Strogatz, Steven H. & Mirollo, Renato E., “Phase-locking and critical phenomena in lattices of coupled nonlinear oscillators with random intrinsic frequencies”, *Physica D*, 31, 2, 143-168, 1988
- [3] Ren, Liwei & Ermentrout, Bard, “Phase locking in chains of multiple-coupled oscillators”, *Physica D*, 143, 1-4, 56-73, 2000
- [4] Ermentrout, G.B. & Kopell, N., “Frequency plateaus in a chain of weakly coupled oscillators. I”, *SIAM J. Math. An.*, 15, 2, 215-237, 1984
- [5] Kopell, N. & Ermentrout, B., “Phase Transitions and Other Phenomena in Chains of Coupled Oscillators”, *SIAM J. App. Math.*, 50, 4, 1014-1052, 1990
- [6] Gavrielides, A., Kottos, T., Kovanis, V. & Tsironis, G.P., “Spatiotemporal organization of coupled nonlinear pendula through impurities”, *Phys. Rev. E*, 58, 5, 5529-5534, 1998
- [7] Bressloff, P. C. & Coombes, S., “Travelling waves in chains of pulse-coupled integrate-and-fire oscillators with distributed delays”, *Physica D*, 130, 3-4, 232-254, 1999
- [8] Osipov, G. V., Pikovsky, A. S., Rosenblum, M. G. & Kurths, J., “Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators”, *Phys. Rev. E*, 55, 33, 2353-2361, 1997
- [9] Manrubia, S. C., Mikhailov, A. S. & Zanette, D. H., “Emergence of dynamical order”, *World Scientific lecture notes in complex systems*, 2. Singapore, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2004
- [10] Pikovsky, Arkady, Rosenblum, Michael & Kurths, J., “Synchronization : a universal concept in nonlinear sciences”, *Cambridge nonlinear science series*, 12. New York, Cambridge University Press, 2001
- [11] Mirollo, Renato E. & Strogatz, Steven H., “Synchronization of Pulse-Coupled Biological Oscillators”, *SIAM J. App. Math.*, 50, 6, 1645-1662, 1990
- [12] Bressloff, P.C. & Coombes, S., “Dynamics of strongly coupled spiking neurons”, *Neural Comput.*, 12, 1, 91-129, 2000
- [13] Ermentrout, G.B. & Chow, C.C., “Modelling neural oscillations”, *Physiol. & Behav.*, 77, no 4-5, pp. 629-633, 2002
- [14] Guisset, J. L., Ramírez Ávila, G. M. & Deneubourg, J. L., “Constructing coupled electronic fireflies and measuring their phase-locking behavior (in Spanish)”, *Rev. Bol. Fis.*, 1, 7, 102-114, 2001
- [15] Guisset, Jean-Luc, Deneubourg, Jean-Louis & Ramírez-Ávila, Gonzalo Marcelo, “The Phase Information Associated to Synchronized Electronic Fireflies”, *arXiv.nlin.AO/0206036*, Mon, 24 Jun 2002 16:07:15 GMT, 2002
- [16] Politi, A., Livi, R., Oppo, G.-L. & Kapral, R., “Unpredictable behaviour in stable systems”, *Europhys. Lett.*, 22, 571, 1993
- [17] Pinto, Sandro E. de Souza, Lunardi, Jose T., Saleh, Abdala M. & Batista, Antonio M., “Some aspects of the synchronization in coupled maps”, *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 72, 3, 037206-4, 2005
- [18] Goldsztein, G. & Strogatz, S. H., “Stability of synchronization in networks of digital phase-locked loops”, *Int. J. Bif. & Chaos*, 5, 4, 983-990, 1995
- [19] Díaz-Guilera, A. & Pérez, C. J., “Mechanisms of synchronization and pattern formation in a lattice of pulse-coupled oscillators”, *Phys. Rev. E*, 57, 4, 3820-3828, 1998
- [20] Guardiola, X., Díaz-Guilera, A., Llas, M. & Pérez, C. J., “Synchronization, diversity, and topology of networks of integrate and fire oscillators”, *Phys. Rev. E*, 62, 4, 5565-5570, 2000
- [21] Sanders, D., “Synchronization time in coupled map lattices (personal communication)”, May 2002, 2002
- [22] De Sousa Vieira, M., Lichtenberg, A.J. & Lieberman, M.A., “Self-synchronization of many coupled oscillators”, *Int. J. Bif. & Chaos*, 4, 6, 1563-1577, 1994
- [23] Hopfield, J.J. & Herz, A.V., “Rapid local synchronization of action potentials: toward computation with coupled integrate-and-fire neurons”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 92, no. 15, pp. 6655-6662, 1995
- [24] Campbell, Shannon R., Wang, DeLiang L. & Jayaprakash, Ciriyaam, “Synchrony and Desynchrony in Integrate-and-Fire Oscillators”, *Neural Comput.*, 11, 7, 1595-1619, 1999
- [25] Camazine, Scott, Deneubourg, Jean-Louis, Franks, Nigel R., Sneyd, James, Theraulaz, Guy & Bonabeau, Eric, “Self-Organization in Biological Systems”, *Princeton University Press, Princeton, Princeton Studies in complexity*, 2001